第二章　导数与微分

在生产实践和科学实验中，当研究运动的各种形式时，都需要从数量上研究函数相对于自变量的变化快慢程度，以及当自变量有微小变化时，函数的变化幅度大小等问题. 解决这两类问题，我们需要引入导数和微分的概念. 本章将主要介绍导数、微分的概念及其计算方法.

第一节　导数的概念

一、引例

★ 微课

引例

为了说明微分学的基本概念——导数，我们先讨论以下两个问题：速度问题和切线问题.

1. 变速直线运动的瞬时速度

我们知道在物理学中，物体做匀速直线运动时，它在任何时刻的速度可由公式

$$v=\frac{s}{t}$$

来计算. 其中，s 为物体经过的路程，t 为时间. 如果物体做非匀速运动，它的运动规律是 $s=s(t)$，那么在某一段时间$[t_0,t_1]$内，物体的位移（即位置增量）$s(t_1)-s(t_0)$与所经历的时间（即时间增量）t_1-t_0 的比，就是这段时间内物体运动的平均速度. 我们把位移增量 $s(t_1)-s(t_0)$记作 Δs，时间增量 t_1-t_0 记作 Δt，平均速度记作$\bar{v}$，得

$$\bar{v}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

那么，怎样求非匀速直线运动的物体在某一时刻的速度呢？

由于物体做变速运动，用匀速直线运动的公式 $v=\frac{s}{t}$来计算它在某一时刻的速度已不适用. 处理这个问题的基本方法是“匀速代变速”. 为此，给 t_0 一个增量 Δt，当时间由 t_0 改变到 $t_0+\Delta t$ 时，在 Δt 这一段时间内，物体走过的路程是

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0),$$

物体在时间间隔 Δt 内的平均速度是

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

用 Δt 这一段时间内的平均速度表示物体在 t_0 时刻的瞬时速度，这当然是近似值，显然 Δt 越小，即时刻 t 越接近于 t_0，其近似程度就越好. 为完成“近似”向“精确”的转化，令 $\Delta t\to 0$，如果平均速度 $\bar{v}$ 的极限存在，那么这个极限值就叫作物体在时刻 t_0 的速度（瞬时速度），即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

2. 切线问题

设 M 是曲线 C 上任一点，N 是曲线上在点 M 附近的一点，作割线 MN. 当点 N 沿着曲线 C 向点 M 移动时，割线 MN 就绕着 M 转动，当点 N 无限趋近于点 M 时，割线 MN 的极限位置为 MT，直线 MT 叫作曲线在点 M 处的切线，如图 2-1 所示.

已知曲线方程 $y=f(x)$，可以求过曲线上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率. 在 M 点的附近取点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，其中 Δx 可正可负，作割线 MN，其斜率为（φ 为倾斜角）

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 MN 将绕着点 M 转动到极限位置 MT，如图 2-2 所示. 根据上面切线的定义，直线 MT 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线. 自然，割线 MN 的斜率 $\tan\varphi$ 的极限就是切线 MT 的斜率 $\tan\alpha$（α 是切线 MT 的倾斜角），即

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

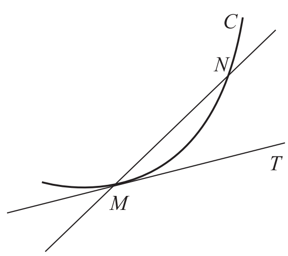

图 2-1

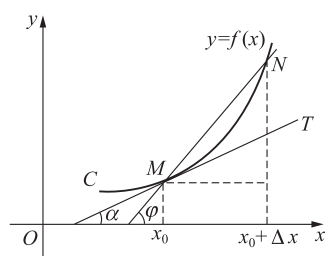

图 2-2

以上两个问题，虽然它们所代表的具体内容不同，但从数量上看，它们有共同的本质：都是计算当自变量的增量趋于零时，函数的增量与自变量的增量之比的极限. 在自然科学、工程技术问题和经济管理中，还有许多非均匀变化的问题，也都可归结为这种形式的极限. 因此，抽去这些问题的不同的实际意义，只考虑它们的共同性质，就可得出函数的导数定义.

二、导数的概念

★微课

导数的定义

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数 y 有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限存在，那么这个极限就称为函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处的导数**，记为 $y'|_{x=x_0}$，即

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\tag{2-1}$$

也可以记作

$$f'(x_0),\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\text{或}\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

如果式(2-1)的极限存在，那么就称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处可导**. 如果式(2-1)的极限不存在，那么就说函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处不可导**.

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的每一点都可导，那么就说函数 $y=f(x)$ **在区间(a,b)内可导**. 这时，对于(a,b)内的每一个 x 值，都有唯一确定的导数值与之对应，这就构成了 x 的一个新的函数，这个新的函数叫作原来函数 $y=f(x)$的**导函数**，记为 y'，$f'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

在式(2-1)中，把 x_0 换成 x，即得 $y=f(x)$的导函数公式：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

显然，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}.$$

为方便起见，在不致引起混淆的地方，导函数也称**导数**.

由此可见，导数是用极限来定义的，类似于有关极限的内容，导数有左右导数的定义.

定义 2 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

存在，则称 $y=f(x)$在点 x_0 的左(右)导数存在，记作 $f'_-(x_0)$($f'_+(x_0)$).

函数的左(右)导数，又称函数的单侧导数.

显然，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处导数存在时，有结论：

$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow$左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$存在并且相等.

三、导数的几何意义

由切线斜率问题的讨论及导数定义可知：函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$的几何意义是曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha.$$

其中，α 是切线的倾斜角. 根据导数的几何意义及直线的点斜式方程可得，曲线 $y=f(x)$在给定点 $M(x_0,y_0)$处的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,y_0)$ 且与切线垂直的直线叫作曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的**法线**. 若 $f'(x_0)\neq 0$,则法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

【例 1】 求过曲线 $y=3x^2$ 上点(2,12)的切线方程与法线方程.

【解】 因为

$$f'(x)=(3x^2)'=6x,$$

则

$$f'(2)=12.$$

于是过点(2,12)的切线方程为

$$y-12=12(x-2),$$

即

$$12x-y-12=0.$$

法线方程为

$$y-12=-\frac{1}{12}(x-2),$$

即

$$x+12y-146=0.$$

四、函数可导性与连续性的关系

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在. 由函数极限存在与无穷小的关系知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \quad (\alpha\text{ 是当 }\Delta x\to 0\text{ 时的无穷小}).$$

上式两端同乘以 Δx,得 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$. 不难看出,当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y\to 0$. 这就是说,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.

所以,若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则函数在该点处必连续.

注意　如果函数 $y=f(x)$ 在某一点处连续,却不一定在该点处可导.

【例 2】 证明:函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处连续,但在 $x=0$ 处不可导.

【证明】 因为在 $x=0$ 点处有 $y=0$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0$,所以 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处连续.

因为在点 $x=0$ 处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}},$$

而当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to+\infty$，即导数为无穷大，即不可导. 这种情况表示曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点具有垂直于 x 轴的切线.

习题 2－1

1. 设质点的运动方程是 $s=2t^2-t+2$，计算从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度，并计算当 $\Delta t=0.1$ 时的平均速度，再计算 $t=2$ 时的瞬时速度.
2. 根据导数的定义，求下列函数的导函数和导数值.
   (1) 已知 $f(x)=5+2x$，求 $f'(x)$，$f'(-5)$；(2) 已知 $y=x^2-1$，求 y'，$y'|_{x=2}$.
3. 求下列函数的导数.
   (1) $y=x^{1.8}$；(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；(3) $y=3^x$；(4) $y=\dfrac{1}{x^2}$.
4. 已知曲线 $y=2x^3$，求：
   (1) 该曲线在 $x=1$ 处的切线的斜率；
   (2) 该曲线在 $x=1$ 处的切点的坐标及切线的方程.
5. 求双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线方程和法线方程.
6. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程.

第二节 函数的求导法则

一、函数和、差、积、商的求导法则

★ 微课

四则运算与反函数的求导法则

法则 1 若函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则函数 $u(x)\pm v(x)$ 也在点 x 处可导，且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x).$$

法则 2 若函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则函数 $u(x)\cdot v(x)$ 在点 x 处也可导，且

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

特别地，令 $v(x)=c$（常数），则由于 $c'=0$，所以有 $[cu(x)]'=cu'(x)$.

法则 3 若函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，且 $v(x)\neq 0$，则函数 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 处也可导且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

【例 1】 求函数 $y=3x^3+x^2+5$ 的导数.

【解】 $y'=(3x^3+x^2+5)'=9x^2+2x.$

【例 2】 求函数 $y=x^2\sin x$ 的导数.

【解】 $y'=(x^2\sin x)'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x.$

【例 3】 求函数 $y=x\ln x+6x^2+\cos x$ 的导数.

【解】

$$\begin{aligned} y'&=(x\ln x+6x^2+\cos x)'=(x\ln x)'+(6x^2)'+(\cos x)'\\ &=x'\ln x+x(\ln x)'+12x-\sin x\\ &=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+12x-\sin x\\ &=\ln x+1+12x-\sin x. \end{aligned}$$

【例 4】 求函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的导数.

【解】 $y'=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}.$

二、复合函数的求导法则

微课

复合函数的求导法则

法则 4 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，且 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，那么复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x 处也可导，并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

或

$$f'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

法则 4 可以推广到有有限个中间变量可导函数的复合函数的情况.

例如，$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$

利用导数定义及其他求导方法，可以求得基本初等函数的导数公式：

(1) $(C)'=0$ （C 为常数）；　(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 为任意实数）；

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$；　(4) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；　(8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$；　　(10) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；

(11) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；　　(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

这些公式对基本初等函数的求导(求导数的简称)十分有用,读者应尽量熟记.

【例 5】 求函数 $y=(2x+3)^2$ 的导数.

【解】 设 $y=u^2$,$u=2x+3$,则

$$y'=(u^2)'\cdot(2x+3)'=2u\cdot 2=4u=4(2x+3).$$

【例 6】 求函数 $y=\ln(x^2+3)$的导数.

【解】 设 $y=\ln u$,$u=x^2+3$,则

$$y'=(\ln u)'\cdot(x^2+3)'=\frac{1}{u}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+3}.$$

三、隐函数的求导法则

前面讨论函数求导方法所涉及的函数 y 已写成自变量 x 的明显表达式 $y=f(x)$的形式,这样的函数叫作**显函数**.但有时候还会遇到另一类函数,是由一个含有 x 和 y 的方程 $F(x,y)=0$来确定的函数 y,如 $x^2+y^2=4$,$xy=e^{x+y}$等,这样的函数叫作**隐函数**.

下面来讨论隐函数的求导问题.如果一个隐函数能够转化为显函数,其导数可以用以前学过的方法求得,但是,有的隐函数很难或是根本不能转化为显函数,在这种情况下,隐函数的求导方法如下：

★微课

隐函数的求导法则

(1) 将方程 $F(x,y)=0$ 的两端对 x 求导,在求导过程中把 y 看成 x 的函数,y 的函数看成是 x 的复合函数；

(2) 求导后,解出 y'即可(式子中允许有 y 出现).

【例 7】 已知隐函数方程 $x^2+y^2=25$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

【解】 将方程两边同时对 x 求导,并注意到 y 是 x 的函数,y^2 是 x 的复合函数,从而得

$$2x+2yy'=0,$$

再解出 y',得 $y'=-\dfrac{x}{y}$,即$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.在这个结果中,分母 y 仍然是由方程 $x^2+y^2=25$ 确定的 x 的函数.

【例 8】 求函数 $y=x^x$ 的导数.

【解】 两端取自然对数，得

$$\ln y = x\ln x,$$

两端对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

所以

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

例 8 的解法叫作**对数求导法**，即先对函数式两端直接取对数得到隐函数，再按隐函数求导法则对式子两边求导，这种方法对于幂指函数和有较繁杂的乘除运算的函数很有效.

四、反函数的求导法则

法则 5 设函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 D 内单调，在 y 处可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在 $x=\varphi(y)$ 处也可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \text{或} f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

【例 9】 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

【解】 由 $y=\arcsin x$ 得 $x=\sin y$，两端对 x 求导，得 $1=\cos y \cdot y'$，所以

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地，可以求得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

五、参数方程所确定的函数的导数

在实际应用中，函数 y 与自变量 x 的关系常常通过某一参数变量 t 表示出来，即

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t \text{ 为参数}$$

称为函数的**参数方程**.

由于 y 是参数 t 的函数，由 $x=\varphi(t)$ 知 t 是 x 的函数，所以，y 通过 t 确定为 x 的复合函数. 于是，由复合函数的求导法则及反函数的导数公式有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

【例 10】 求由参数方程$\begin{cases}x=\frac{1}{t}\\y=2t^2\end{cases}$确定的函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4t}{-\frac{1}{t^2}}=-4t^3.$$

习题 2-2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=2x^2-\frac{1}{x^3}+5x+1$；　　(2) $y=x^2\sin x$；

(3) $y=x\ln x+\frac{\ln x}{x}$；　　(4) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

2. 求函数 $y=x\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=-\frac{\pi}{4}$ 处的导数.

3. 求曲线 $y=\frac{3x^2-2x+1}{x^2+2}$ 在点$(-1,0)$的切线方程和法线方程.

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^2+\mathrm{e}^{3x}-\ln 3$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\cos x}+\ln(1+x^2)$；

(3) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；　　(4) $y=\cos(2^x)+\arcsin 2x$；

(5) $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$；　　(6) $y=\ln\frac{x}{1-x}$.

5. 求下列隐函数的导数.

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$；

(3) $x^3+y^3-xy=0$；　　(4) $x^3+xy^2=y$.

6. 求下列参数方程所确定的函数的导数.

(1) $\begin{cases}y=8t^2\\x=4t\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}y=2\sin^2 t\\x=3\cos^2 t\end{cases}$.

第三节　高阶导数

一、高阶导数的概念

一般来说，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数. 若函数 $y'=f'(x)$ 仍是可导的，则把 $y'=f'(x)$ 的导数叫作函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记为 y''，$f''(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

相应地，$y'=f'(x)$ 叫作函数 $y=f(x)$ 的**一阶导数**.

类似地，$y=f(x)$ 的二阶导数 y'' 的导数叫作 $y=f(x)$ 的**三阶导数**，三阶导数的导数叫作 $y=f(x)$ 的**四阶导数**，等等. 一般地，$f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数叫作 $y=f(x)$ 的 n **阶导数**，分别记作

★ 微课

高阶导数的概念

$$y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)} \text{ 或 } f'''(x),f^{(4)}(x),\cdots,f^{(n)}(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

【例 1】 求函数 $y=\cos x+\ln x+x^2$ 的二阶导数.

【解】 因为 $y'=-\sin x+\frac{1}{x}+2x$，所以 $y''=-\cos x-\frac{1}{x^2}+2$.

【例 2】 求函数 $y=a^x$ 的二阶导数，并推导函数的 n 阶导数公式.

【解】 $y=a^x$，$y'=a^x\ln a$，$y''=a^x(\ln a)^2$，$y'''=a^x(\ln a)^3$，$\cdots$，由此即得 $y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.

二、二阶导数的物理意义

设物体做变速直线运动，其运动方程为 $s=s(t)$，瞬时速度为 $v=s'(t)$. 此时，若速度 v 仍是时间 t 的函数，我们可以求速度 v 对时间 t 的变化率：

$$v'(t)=(s'(t))'=s''(t).$$

在力学中把上式叫作物体在给定时刻的**加速度**，用 a 表示. 也就是说，物体的加速度 a 是路程 s 对时间 t 的二阶导数，即

$$a=v'(t)=s''(t)=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}.$$

【例 3】 设物体的运动方程为 $s=2\sin(2t+3)$，求物体运动的加速度.

【解】 因为 $s=2\sin(2t+3)$，所以瞬时速度 $v=s'=4\cos(2t+3)$，加速度 $a=s''=-8\sin(2t+3)$.

习题 2－3

1. 求下列函数的二阶导数.

   (1) $y=x^6+2x^5+x^3$；　　(2) $y=2e^x+x^3$；

   (3) $y=x^2\ln x$；　　(4) $y=(1+x^2)\arctan x$.

2. 验证 $y=e^x\sin x$ 是方程 $y''-2y'+2y=0$ 的解.

3. 求函数 $y=e^{2x}$ 的 n 阶导数.

4. 某物体的运动方程为 $s=2t^3+\frac{1}{2}gt^2$，求物体运动的加速度.

第四节　函数的微分

一、微分的概念

微课

微分的概念

在实际生产实践中，有时需要考虑这样的问题：当自变量有一微小的增量时，函数的增量是多少. 例如，一个边长为 x_0 的正方形金属薄片，当受冷热影响时，其边长由 x_0 变到 $(x_0+\Delta x)$，问此时薄片的面积的改变量是多少？

设正方形薄片的边长为 x_0，面积为 y，则上面问题就是求当函数 $y=x^2$ 的自变量由 x_0 变到 $(x_0+\Delta x)$ 时函数 y 的改变量 Δy，也就是面积的改变量，即

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2\\&=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

例如，当 $x_0=10$，$\Delta x=0.1$ 时，面积的改变量为

$$\Delta y=2\times10\times0.1+0.1^2=2.01;$$

当 $x_0=10$，$\Delta x=0.01$ 时，面积的改变量为

$$\Delta y=2\times10\times0.01+0.01^2=0.200\ 1;$$

当 $x_0=10$，$\Delta x=0.001$ 时，面积的改变量为

$$\Delta y=2\times10\times0.001+0.001^2=0.020\ 001.$$

由此可见，当 $|\Delta x|$ 很小时，$(\Delta x)^2$ 的作用非常小，可以忽略不计.

因此，函数 $y=x^2$ 在 x_0 有微小改变量 Δx 时，函数的改变量 Δy 约为 $2x_0\cdot\Delta x$，即

$$\Delta y\approx2x_0\cdot\Delta x.$$

从图 2-3 中不难看出，Δy 表示的是以 x_0 为边长的正方形外围的阴影部分面积，它为图示的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ部分的面积之和，即 $2(x_0\cdot\Delta x)+(\Delta x)^2$，显然当 $|\Delta x|$ 相对于 x_0 很小时，

$(\Delta x)^2$ 是微乎其微的.

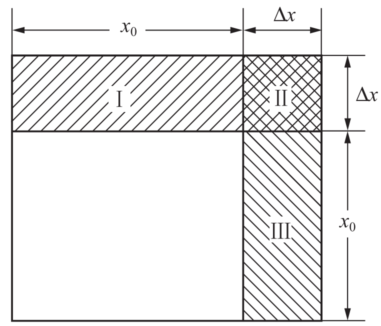

图 2-3

当 $f(x)=x^2$ 时，$f'(x_0)=2x_0$，因此 $\Delta y\approx 2x_0\cdot\Delta x$ 可以写成

$$\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

由于 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，所以通常把 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 叫作 Δy 的线性主部.

一般地，对于给定的可导函数 $y=f(x)$，当自变量在 x_0 处有微小的改变量 Δx 时，函数值 y 的改变量 Δy 可用下式近似计算，即

$$\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{2-2}$$

我们把 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的微分.

定义 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处存在导数 $f'(x_0)$，那么 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 就叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$，即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内任一点 x 处都可导，则把它在点 x 处的微分叫作函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x.$$

由定义可以知道自变量的微分就是自变量的改变量，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，于是

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \tag{2-3}$$

将式(2-3)两边同时除以 $\mathrm{d}x$ 可以得出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

上式说明导数 $f'(x)$ 是函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 的商，因此导数也叫作**微商**.

今后我们把可导函数也称为可微函数.

【例 1】 求函数 $y=2x^3+5x^2+6x$ 在 $x=2$ 处的微分.

【解】 $\mathrm{d}y\big|_{x=2}=(2x^3+5x^2+6x)'\big|_{x=2}\Delta x=(6x^2+10x+6)\big|_{x=2}\Delta x=50\Delta x=50\mathrm{d}x.$

【例 2】 求函数 $y=\ln x+\cos x$ 的微分.

【解】 因为 $y'=(\ln x+\cos x)'=\dfrac{1}{x}-\sin x$，所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{x}-\sin x\right)\mathrm{d}x.$

二、微分的几何意义

如图 2-4 所示，设曲线 $y=f(x)$ 上一点 P 的坐标为 $(x_0,f(x_0))$，过 P 点作割线 PQ 交曲线于点 Q，其坐标为 $(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$，则 $\mathrm{d}x=\Delta x=PR$，$\Delta y=RQ$.

★微课

微分的几何意义

又设过点 $P(x_0,f(x_0))$ 的切线 PT 交 RQ 于点 M，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是过 P 点的切线 PT 的斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha=\frac{RM}{PR},$$

因此函数在点 x_0 的微分为

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x=\frac{RM}{PR}\cdot PR=RM.$$

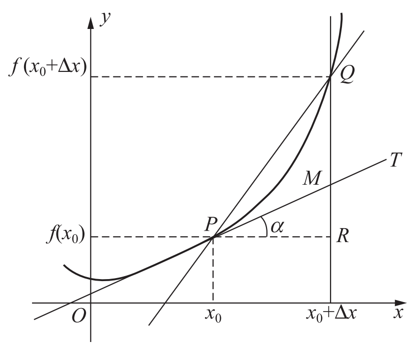

图 2-4

这说明函数在 $x=x_0$ 处的微分是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的纵坐标对应于 Δx 的改变量. 这就是微分的几何意义.

三、微分的运算

从函数微分的表达式

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

可知，要计算函数的微分，只要求出函数的导数，再乘以自变量的微分即可. 因此，从导数的基本公式和运算法则就可以直接推出微分的基本公式和运算法则.

1. 微分的基本公式

(1) $\mathrm{d}(C)=0$ （C 为常数）；

(2) $\mathrm{d}(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$ （$a>0,a\neq1$）；

(4) $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(5) $d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx \quad (a>0,a\neq 1)$；

(6) $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$；

(7) $d(\sin x)=\cos x dx$；

(8) $d(\cos x)=-\sin x dx$；

(9) $d(\tan x)=\sec^2 x dx$；

(10) $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$.

2．函数和、差、积、商的微分法则

由函数的和、差、积、商的求导法则，可以求得函数和、差、积、商的微分法则：

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$；

(2) $d(uv)=vdu+udv$；

(3) $d(Cu)=Cdu \quad$ (C 为常数)；

(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}(v\neq 0)$.

3．复合函数的微分法则

若函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx,$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$，故上式为

$$dy=f'(u)du.$$

所以复合函数的微分法则为

$$dy=f'(u)du.$$

将这个公式与 x 为自变量的微分公式 $dy=f'(x)dx$ 相比较，可以发现它们的形式完全相同，这表明无论 u 是自变量还是中间变量（即自变量的函数），函数 $y=f(u)$ 的微分形式 $dy=f'(u)du$ 都保持不变，微分的这种性质叫作**一阶微分形式的不变性**.

【例 3】 求函数 $y=\ln(2x^2+1)$ 的微分.

【解】 $dy=d[\ln(2x^2+1)]=\dfrac{1}{2x^2+1}d(2x^2+1)=\dfrac{4x}{2x^2+1}dx$.

四、微分在近似计算中的应用

微课

微分在近似计算中的应用

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的增量 Δy，当 $|\Delta x|$ 很小时，可用微分 dy 来代替，即

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$

于是

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

在上式中，令 $x_0=0,\Delta x=x$，得

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{2-4}$$

应用式(2-4)可推得几个工程上常用的近似公式(假定$|x|$是很小的数值)：

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$； (2) $\sin x\approx x$； (3) $\tan x\approx x$；

(4) $\ln(1+x)\approx x$； (5) $e^x\approx 1+x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}$，因而有

$$f(0)=\sqrt[n]{1+0}=1, f'(0)=\frac{1}{n},$$

将以上两式代入公式(1)得 $f(x)\approx 1+\frac{1}{n}x$，即 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$.

其他公式的证明类似，这里省略.

【例 4】 计算 $e^{-0.0001}$的近似值.

【解】 应用近似公式 $e^x\approx 1+x$. 得 $e^{-0.0001}\approx 1-0.0001=0.9999$.

【例 5】 设某国的国民经济消费模型为

$$y=10+0.4x+0.01x^{\frac{1}{2}}.$$

其中，y 为总消费(单位：十亿元)，x 为可支配收入(单位：十亿元). 当 $x=100.05$ 时，问总消费是多少？

【解】 令 $x_0=100,\Delta x=0.05$，因为 Δx 相对于 x_0 较小，可用上面的近似公式来求值.

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)&\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\&=(10+0.4\times 100+0.01\times 100^{\frac{1}{2}})+(10+0.4x+0.01x^{\frac{1}{2}})'\Big|_{x=100}\cdot\Delta x\\&=50.1+\left(0.4+\frac{0.01}{2\sqrt{x}}\right)\Big|_{x=100}\times 0.05\\&=50.120025(\text{十亿元}).\end{aligned}$$

习题 2－4

1. 求下列函数在给定条件下的增量和微分.

(1) $y=2x^2+4$，x 从 0 变到 0.01；

(2) $y=2x+3$，x 从 2 变到 1.99.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=x^3+2x^2$； (2) $y=x^2-x^{\frac{1}{2}}$；

(3) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$；　　(4) $y=\cos 2x+\tan x$；

(5) $y=(x+2)^3$；　　(6) $y=3^x$.

3. 计算下列函数的近似值.

(1) $\sqrt[5]{1.001}$；　　(2) $\ln 1.02$；

(3) $\tan 0.01$；　　(4) $e^{0.03}$.

4. 已知一正方体的棱长 $x=5$ m,如果它的棱长增加 0.01 m,求增加的体积的精确值与近似值.

复习题二

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^2+2^x+\ln 2$；　　(2) $y=e^{2x}\sin 3x$；

(3) $y=x^{\sin x}$；　　(4) $y=\frac{x+1}{x-1}$；

(5) $y=\sin x+\arccos x$；　　(6) $y=\ln x+\ln\ln x+\ln\ln\ln x$.

2. 求由下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

(1) $2e^x-2\cos y-1=0$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{3}}}$；　　(2) $e^{xy}-x^2-y^3=0$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\ y=1}}$；

(3) $y\sin x-\cos(x-y)=0$,求$\frac{dy}{dx}$；　　(4) $y=f(x+y)$,其中 $f(u)$可导,求$\frac{dy}{dx}$.

3. 求下列参变量函数的导数.

(1) $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^2\end{cases}$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$,$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$；　　(2) $\begin{cases}x=\sec\theta\\ y=\tan\theta\end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}$,$\frac{d^2y}{dx^2}$；

(3) $\begin{cases}x=t-\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}$.

4. 求下列曲线在指定点的切线方程和法线方程.

(1) $y=e^x$,$x=0$；　　(2) $xy+\ln y=1$,点$(1,1)$；

(3) $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sqrt{3}\sin t\end{cases}$,$t=\frac{\pi}{3}$.

5. 求由下列方程所确定的曲线在指定点处的切线方程.

(1) $x^2+xy+y^2=7$,点$(3,-2)$；　　(2) $\begin{cases}x=e^{2\theta}\cos\theta\\ y=e^{2\theta}\sin\theta\end{cases}$,$\theta=\frac{\pi}{2}$.

6. 求下列函数的微分 dy.

(1) $y=\sqrt{x-x^2}$；　　(2) $y=1-\cos 2x$,并求$dy\big|_{\substack{x=\pi/4\\ \Delta x=0.1}}$；

(3) $y=e^{ax}\sin bx$(a,b 为常数)；　　(4) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(5) $y=(\ln x)^{x}$.

7. 利用微分近似公式计算下列各式.

(1) $\sqrt[3]{1.001}$;　　(2) $e^{0.003}$;

(3) $\ln 1.008$;　　(4) $\sin 0.02$.

8. 下列各题中，$f(u)$可导.

(1) 设 $y=f(x^{3})+[f(x)]^{3}$，求$\dfrac{dy}{dx}$;

(2) 设 $y=xf(1-2x)$，求$\dfrac{dy}{dx}$;

(3) 设 $y=f(\sin x)+\sin f(x)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

9. 求下列函数的高阶导数.

(1) $y=x^{5}$，求 $y^{(5)}$，$y^{(6)}$;

(2) $y=2^{x}$，求 y''，$y^{(n)}$;

(3) $y=(1+x^{2})\arctan x$，求 y'';

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$，求 y''.

10. 一垂直向上运动的火箭，假设它只受重力作用，其质量减少的速率为 b，其速度 v 为时间 t 的函数：

$$v=v_{0}-gt-k\ln\left(1-\frac{bt}{m_{0}}\right).$$

其中，v_{0} 为初速度，m_{0} 为初始质量，k 为常数，试求该火箭运行的加速度(距离单位为 m，时间单位为 s).

测试题
选择题

测试题
判断题